数理解析研究所講究録 1238 巻 2001 年 207-232

既約正則概均質ベクトル空間の縮約

和地輝仁 (WACHI, Akihito)
北海道工業大学総合教育研究部 (Division of General Education, Hokkaido Institute of Technology)

1. Introduction

簡約代数群 G が有限次元ベクトル空間 V に概均質に作用しているとする．つまり稠密な G-軌道が V 上にあるとする．この概均質ベクトル空間 (G,V) に相対不変式 $f\in\mathbf{C}[V]$ があるとする．つまり，ある $\chi\in\mathrm{Hom}(G,\mathbf{C}^{\times})$ により $f(gv)=\chi(g)f(v)$ $(g\in G, v\in V)$ をみたす f が存在するとする．このとき $V_f=\{v\in V|f(v)\neq 0\}$ とおくと，V_f は G が作用するアファイン多様体であり，稠密な G-軌道をもつので，V からの相対位相に関する閉 G-軌道がただひとつ存在する．その閉軌道から v_f をとり，$G_{v_f}=Z_G(v_f)=\{g\in G|g.v_f=v_f\}$ と置くと簡約代数群になる．G_{v_f} の極大トーラスをとり T_f とする．ここで，T_f が自明でないとき，

$$G^{(f)}=Z_G(T_f)/T_f,\qquad V^{(f)}=\{v\in V|T_f.v=v\},\qquad f'=f|_{V^{(f)}},$$

とおけば，$\dim G^{(f)}<\dim G$, $\dim V^{(f)}<\dim V$ である．

Definition 1.1 (G,V) を簡約概均質ベクトル空間，$f\in\mathbf{C}[V]$ を相対不変式とするとき，上のように $(G^{(f)},V^{(f)})$ を導く操作を縮約と呼ぶ．

Definition 1.2 (G,V) を簡約概均質ベクトル空間，$f\in\mathbf{C}[V]$ を相対不変式とするとき，f の b-関数 $b_f(s)\in\mathbf{C}[s]$ を次で定める．

$$f^*(\partial)f^{s+1}=b_f(s)f^s.$$

ここで，$f^*(\partial)$ は f が指標 $\chi\in\mathrm{Hom}(G,\mathbf{C}^{\times})$ に対応するとき，χ^{-1} に対応する相対不変式 $f^*\in\mathbf{C}[V^*]$ を V 上の定数係数微分作用素とみたものである．

Theorem 1.3 (Gyoja) (G,V) を簡約概均質ベクトル空間，$f\in\mathbf{C}[V]$ を相対不変式とし，縮約したものを $(G^{(f)},V^{(f)})$, $f'\in\mathbf{C}[V']$ とする．このとき
(1) $(G^{(f)},V^{(f)})$ は簡約概均質ベクトル空間であり，$\dim G^{(f)}=\dim V^{(f)}$ である．
(2) f' は $(G^{(f)},V^{(f)})$ のゼロでない相対不変式である．
(3) f の b-関数 b_f と f' の b-関数 b'_f の零点は，整数差を除いて一致する．つまり，$b_f(s)=a(s+\alpha_1)\cdots(s+\alpha_d)$, $b'_f(s)=b(s+\beta_1)\cdots(s+\beta_{d'})$ と書いたとき $(a,b\neq 0)$, $d=d'$ かつ，番号を付け替えると全ての i に対して $\alpha_i\equiv\beta_i\pmod{\mathbf{Z}}$ である □

さて，この定理により縮約による b-関数の零点移動は整数になるとわかるが，どれだけ動くかはわからない．概均質ベクトル空間のうちでも簡単で分類も早くから完了している既約正則概均質ベクトル空間に対して，縮約と b-関数の零点移動を調べるのがこの論説の目的である．縮約が可能なものは全ての空間を扱った．また単純正則概均質ベクトル空間についてもいくつか計算を終えているが，全てではないことと紙数が足りないこともあり，別の機会にまとめたいと思う．

このテーマを勧めて下さった行者明彦先生と，有益な助言をくださった杉山和成氏にこの場を借りて感謝します．

2. Contraction of the irreducible regular prehomogeneous vector spaces

この節では [7] により分類されている, 既約正則概均質ベクトル空間の縮約を行い, それにより相対不変式の b-関数の零点がどう動いているかを調べる.

(G,ρ,V) を既約正則概均質ベクトル空間とし, $f \in \mathbf{C}[V]$ を唯一の基本相対不変式とする. この場合は f に対応する指標 $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbf{C}^\times)$ は $\chi(g) = (\det\rho(g))^{\deg f/\dim V}$ で与えられ, また, 集合 $V_f = \{v \in V | f(v) \neq 0\}$ は V の開軌道であるから, V_f の中の唯一の（相対位相に関する）閉軌道は V_f 自身であり, v_f としては V の一般点をとればよいことに注意する. さらに, b-関数の零点の移動については本来は f^k $(k \in \mathbf{Z}_{>0})$ に対して調べなくてはならないが, f^k の b-関数を $b_k(s)$ とし $b(s) = b_1(s)$ と書いたとき, $b_k(s) = b(ks+k)b(ks+k-1)\cdots b(ks)$ となるので, f に対してのみ調べる.

以下で [7] の分類番号の順に, 縮約と b-関数の零点の移動を調べる. 縮約前の b-関数は [6] による. また以下の例における $v_f, G_{v_f}, \mathfrak{g}_{v_f}$ なども, [7] や [6] に載っているものが多い.

GL_m などは複素数係数の線形代数群, $V(m)$ は m 次元複素ベクトル空間, I_m は m 次単位行列を表す. また $\mathbf{T}^m = \{\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_m) \in GL_m\}$, $S\mathbf{T}^m = \mathbf{T}^m \cap SL_m$ と定め, $\mathfrak{g}^{(f)} = \mathrm{Lie}(G^{(f)})$, $\mathfrak{t}_f = \mathrm{Lie}(T_f)$ などと置く.

2.1 (1) $(H \times GL_m, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(m) \otimes V(m))$

ここで H は GL_m の中の半単純部分群としてよい. さらに H のある極大トーラス T_H が GL_m の対角成分に入っているとする.

$$
\begin{aligned}
(G,V) &= (H \times GL_m, \mathrm{Mat}(m)),\\
(h,g).X &= hX\,{}^t g,\\
f &= \det X,\\
v_f &= I_m,\\
G_{v_f} &= \{(h, {}^t h^{-1}) \in H \times GL_m | h \in H\},\\
T_f &= \{(t,t^{-1}) | t \in T_H\},\\
Z_G(T_f) &= T_H \times Z_{GL_m}(T_H).
\end{aligned}
$$

T_H が GL_m の対角成分の左上から l 個の成分を占めているとすると,

$$
\begin{aligned}
G^{(f)} &\simeq 1 \times Z_{GL_m}(T_H)\\
&\simeq \mathbf{T}^l \times GL_{m-l},\\
V^{(f)} &= \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & Y \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m) \,\middle|\, t \in \mathbf{T}^l, Y \in \mathrm{Mat}_{m-l} \right\},\\
&\simeq \mathbf{C}^l \oplus \mathrm{Mat}(m-l).
\end{aligned}
$$

したがって縮約は,

$$
\begin{aligned}
(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^l \times GL_{m-l}, \mathbf{C}^l \oplus \mathrm{Mat}(m-l)),\\
(t,g).(v,Y) &= (tv, Y\,{}^t g) \qquad (v = {}^t(v_1,\ldots,v_l) \in \mathbf{C}^l),\\
f' &= v_1 \cdots v_l \det Y.
\end{aligned}
$$

また b-関数は

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+2)\cdots(s+m),\\
b'_f(s) &= (s+1)^l \cdot (s+1)(s+2)\cdots(s+m-l),
\end{aligned}
$$

であるからその零点の整数差は,

$$(0,1,\ldots,l-1;\overbrace{l,\ldots,l}^{m-l}),$$

である. ただし, 差のとりかたは, $\mathbf{Z}$ を法として合同な零点たちを, $b_f(s)$ と $b'_f(s)$ とでそれぞれ小さい順に並べて差を取るやりかたである. 以下の例でもそうであるが, この差のとりかたが自然なものかどうかは不明である.

2.2 (2) $(GL_n, 2\Lambda_1, V(n(n+1)/2))$

$$\begin{aligned} (G,V) &= (GL_n, \mathrm{Sym}_n),\\ g.X &= gX\,{}^t g \qquad (g\in GL_n, X\in \mathrm{Sym}_n),\\ f &= \det X, \end{aligned}$$

と実現する.

まず $n=2l$, つまり偶数の場合を考える.

$$\begin{aligned} v_f &= \begin{pmatrix} & I_l \\ I_l & \end{pmatrix},\\ \mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \,\middle|\, A\in\mathfrak{gl}_l; B,C\in \mathrm{Alt}_l\right\}\simeq \mathfrak{o}_{2l},\\ T_f &= \left\{\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}\,\middle|\, t\in \mathbf{T}^l\right\},\\ Z_G(T_f) &= \mathbf{T}^{2l}\subset GL_{2l},\\ G^{(f)} &\simeq \left\{\begin{pmatrix} t & \\ & I_l \end{pmatrix}\,\middle|\, t\in \mathbf{T}^l\right\}\simeq \mathbf{T}^l,\\ V^{(f)} &= \left\{\begin{pmatrix} & Y \\ Y & \end{pmatrix}\,\middle|\, Y=\mathrm{diag}(v_1,\ldots,v_l)\right\}\simeq \mathbf{C}^l, \end{aligned}$$

であるから縮約は,

$$\begin{aligned} (G^{(f)},V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^l,\mathbf{C}^l),\\ t.v &= tv \qquad (t\in\mathbf{T}^l, v={}^t(v_1,\ldots,v_l)\in\mathbf{C}^l),\\ f' &= (v_1\cdots v_l)^2. \end{aligned}$$

また b-関数は

$$\begin{aligned} b_f(s) &= (s+1)(s+3/2)\cdots(s+(2l+1)/2);\\ b'_f(s) &= (s+1)^l(s+1/2)^l, \end{aligned}$$

であるからその零点の整数差は,

$$(0;1,1,2,2,3,3,\ldots,l-1,l-1;l),$$

である.

次に $n=2l+1$, つまり奇数の場合を考える.

$$v_f = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & & I_l \\ & I_l & \end{array}\right),$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -{}^t a & -{}^t b \\ \hline b & A & B \\ a & C & -{}^t A \end{array} \right) \middle| \, a, b \in \mathbf{C}^l, \ A \in \mathfrak{gl}_l, \ B, C \in \mathrm{Alt}_l \right\}, \\
T_f &= \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & t & \\ & & t^{-1} \end{array} \right) \middle| \, t \in \mathbf{T}^l \right\}, \\
Z_G(T_f) &= \mathbf{T}^{2l+1} \subset GL_n, \\
G^{(f)} &\simeq \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} a & & \\ \hline & t & \\ & & I_l \end{array} \right) \middle| \, a \in \mathbf{T}^1, t \in \mathbf{T}^l \right\} \simeq \mathbf{T}^{l+1}, \\
V^{(f)} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} v_0 & & \\ \hline & & Y \\ & Y & \end{array} \right) \middle| \, v_0 \in \mathbf{C}, Y = \mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_l) \right\} \simeq \mathbf{C}^{l+1},
\end{aligned}$$

であるから縮約は,

$$\begin{aligned}
(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^{l+1}, \mathbf{C}^{l+1}) \\
t.v &= {}^t(t_0^2 v_0, t_1 v_1, \ldots, t_l v_l), \\
& \quad (t = \mathrm{diag}(t_0, \ldots, t_l) \in \mathbf{T}^{l+1}, \ v = {}^t(v_0, \ldots, v_l) \in \mathbf{C}^{l+1}), \\
f' &= v_0 (v_1 \cdots v_l)^2.
\end{aligned}$$

また b-関数は,

$$\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+3/2)\cdots(s+(2l+2)/2), \\
b'_f(s) &= (s+1)^{l+1}(s+1/2)^l,
\end{aligned}$$

であるからその整数差は,

$$(0; 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, l, l),$$

である.

2.3 (3) $(GL_{2m}, \Lambda_2, V(m(2m-1)))$

$$\begin{aligned}
(G, V) &= (GL_{2m}, \mathrm{Alt}_{2m}), \\
g.X &= gX\,{}^t g, \qquad (g \in GL_{2m}, X \in \mathrm{Alt}_{2m}), \\
f &= \mathrm{Pf}\, X,
\end{aligned}$$

と実現すると,

$$\begin{aligned}
v_f &= \begin{pmatrix} & I_m \\ -I_m & \end{pmatrix}, \\
G_{v_f} &= Sp_m \subset GL_{2m}, \\
T_f &= \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbf{T}^m \right\}, \\
Z_G(T_f) &= \mathbf{T}^{2m} \subset GL_{2m}, \\
G^{(f)} &\simeq \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & I_m \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbf{T}^m \right\} \simeq \mathbf{T}^m, \\
V^{(f)} &= \left\{ \begin{pmatrix} & Y \\ -Y & \end{pmatrix} \middle| \, Y = \mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_m) \right\},
\end{aligned}$$

であるから縮約は,

$$\begin{aligned}(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^m, \mathbf{C}^m),\\ t.v &= tv \qquad (t \in \mathbf{T}^m, v = {}^t(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbf{C}^m),\\ f' &= v_1 \cdots v_m.\end{aligned}$$

また b-関数は

$$\begin{aligned}b_f(s) &= (s+1)(s+3)\cdots(s+2m-1),\\ b'_f(s) &= (s+1)^m,\end{aligned}$$

であるからその整数差は,

$$(0, 2, 4, \ldots, 2m-2),$$

である.

2.4 (4) $(GL_2, 3\Lambda_1, V(4))$

T_f が自明になるため縮約できない.

2.5 (5) $(GL_6, \Lambda_3, V(20))$

$$\begin{aligned}(G, V) &= (GL_6, \textstyle\bigwedge^3\mathbf{C}^6),\\ g.(x \wedge y \wedge z) &= gx \wedge gy \wedge gz, \qquad (g \in GL_6,\ x \wedge y \wedge z \in \textstyle\bigwedge^3\mathbf{C}^6),\end{aligned}$$

と実現する. f は指標 $(\det g)^2$ に対応することに注意する. $\{u_j\}$ は $\mathbf{C}^6$ の標準的な基底とし, $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ などでは $\wedge$ を省略して書くことにする. すると,

$$\begin{aligned}v_f &= u_1u_2u_3 + u_4u_5u_6,\\ G_{v_f} &= \left\{\begin{pmatrix} A & \\ & B\end{pmatrix} \middle|\ A, B \in SL_3\right\} \times \left\{I_6, \begin{pmatrix} & I_3\\ I_3 & \end{pmatrix}\right\},\\ T_f &= \left\{\begin{pmatrix} t & \\ & t'\end{pmatrix} \middle|\ t, t' \in S\mathbf{T}^3\right\},\\ Z_G(T_f) &= \mathbf{T}^6 \subset GL_6,\\ G^{(f)} &\simeq \left\{\begin{pmatrix} \mathrm{diag}(t_1,1,1) & \\ & \mathrm{diag}(t_2,1,1)\end{pmatrix} \middle|\ t_1, t_2 \in \mathbf{T}^1\right\} \simeq \mathbf{T}^2,\\ V^{(f)} &= \langle u_1u_2u_3, u_4u_5u_6\rangle_{\mathbf{C}\text{-linear}},\end{aligned}$$

であるから縮約は,

$$\begin{aligned}(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^2, \mathbf{C}^2),\\ t.v &= tv \qquad (t = \mathrm{diag}(t_1, t_2) \in \mathbf{T}^2,\ v = {}^t(v_1, v_2) \in \mathbf{C}^2),\\ f' &= v_1^2v_2^2,\end{aligned}$$

である. ただし f' は f の指標を $G^{(f)}$ に制限して $t_1^2t_2^2$ となることから, それに対応する $(G^{(f)}, V^{(f)})$ の相対不変式としてわかる. また b-関数は,

$$\begin{aligned}b_f(s) &= (s+1)(s+5/2)(s+7/2)(s+5),\\ b'_f(s) &= (s+1)^2(s+1/2)^2,\end{aligned}$$

であるからその整数差は,

$$(0, 2, 3, 4),$$

2.6 (6) $(GL_7, \Lambda_3, V(35))$

記号は, (5) $(GL_6, \Lambda_3, V(20))$ と同様とする.

$$
\begin{aligned}
(G,V) &= (GL_7, \textstyle\bigwedge^3 \mathbf{C}^7),\\
g.(x\wedge y\wedge z) &= gx\wedge gy\wedge gz, \qquad (g\in GL_7,\ x\wedge y\wedge z\in \textstyle\bigwedge^3\mathbf{C}^7),
\end{aligned}
$$

と実現する. f は指標 $(\det g)^3$ に対応することに注意する. すると,

$$
\begin{aligned}
v_f &= u_2u_3u_4 + u_5u_6u_7 + u_1(u_2u_5+u_3u_6+u_4u_7),\\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
0 & 2d & 2e & 2f & 2a & 2b & 2c\\
\hline
a & & & & 0 & f & -e\\
b & & X & & -f & 0 & d\\
c & & & & e & -d & 0\\
\hline
d & 0 & -c & b & & & \\
e & c & 0 & -a & & -{}^tX & \\
f & -b & a & 0 & & &
\end{array}\right) \middle| \ a,\ldots,f\in\mathbf{C}, X\in\mathfrak{sl}_3 \right\} \simeq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_2),\\
T_f &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & t & \\ & & t^{-1}\end{pmatrix} \middle| \ t\in S\mathbf{T}^3 \right\},\\
Z_G(T_f) &= \mathbf{T}^7 \subset GL_7,\\
G^{(f)} &\simeq \{\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_5,1,1) | t_j\in\mathbf{T}^1\}\\
&\simeq \mathbf{T}^5,\\
V^{(f)} &= \langle u_2u_3u_4, u_5u_6u_7, u_1u_2u_5, u_1u_3u_6, u_1u_4u_7\rangle_{\mathbf{C}\text{-linear}} \simeq \mathbf{C}^5,
\end{aligned}
$$

であるから縮約は,

$$
\begin{aligned}
(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^5, \mathbf{C}^5),\\
t.v &= {}^t(t_2t_3t_4v_1, t_5v_2, t_1t_2t_5v_3, t_1t_3v_4, t_1t_4v_5),\\
&\quad (t=\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_5)\in\mathbf{T}^5,\ v={}^t(v_1,\ldots,v_5)\in\mathbf{C}^5),\\
f' &= v_1^2v_2^2v_3v_4v_5,
\end{aligned}
$$

である. ただし f' は (5) $(GL_6, \Lambda_3, V(20))$ と同様に得られる. また b-関数は,

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+2)(s+5/2)(s+3)(s+7/2)(s+4)(s+5),\\
b'_f(s) &= (s+1)^5(s+1/2)^2,
\end{aligned}
$$

であるからその整数差は,

$$
(0,1,2,2,3,3,4),
$$

である.

2.7 (7) $(GL_8, \Lambda_3, V(56))$

記号は, (5) $(GL_6, \Lambda_3, V(20))$ と同様とする.

$$
\begin{aligned}
(G,V) &= (GL_8, \textstyle\bigwedge^3 \mathbf{C}^8),\\
g.(x\wedge y\wedge z) &= gx\wedge gy\wedge gz \qquad (g\in GL_8,\ x\wedge y\wedge z\in \textstyle\bigwedge^3\mathbf{C}^8),
\end{aligned}
$$

と実現する. f は指標 $(\det g)^6$ に対応する相対不変式であることに注意する. すると,

$$
v_f = u_1u_2u_3 + u_4u_5u_6 + u_7(u_1u_4 - u_2u_5) + u_8(u_1u_4 - u_3u_6),
$$

$$\mathfrak{g}_{v_f} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} a_1 & 0 & 0 & 0 & c_3 & c_2 & b_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & -c_3 & 0 & -c_1 & -2b_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & -c_2 & c_1 & 0 & -b_3 & 2b_3 \\ \hline 0 & -b_3 & -b_2 & -a_1 & 0 & 0 & c_1 & c_1 \\ b_3 & 0 & b_1 & 0 & -a_2 & 0 & -2c_2 & c_2 \\ b_2 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & -c_3 & 2c_3 \\ \hline c_1 & -c_2 & 0 & b_1 & -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & b_1 & 0 & b_3 & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \, a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\} \simeq \mathfrak{sl}_3,$$

$$T_f = \left\{ \begin{pmatrix} t & & \\ & t^{-1} & \\ & & I_2 \end{pmatrix} \middle| \, t \in S\mathbf{T}^3 \right\},$$

$$Z_G(T_f) = \left\{ \begin{pmatrix} s & \\ & h \end{pmatrix} \middle| \, s \in \mathbf{T}^6, h \in GL_2 \right\},$$

$$G^{(f)} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} t & & \\ & I_2 & \\ & & h \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbf{T}^4, h \in GL_2 \right\} \simeq \mathbf{T}^4 \times GL_2,$$

$$V^{(f)} = \langle u_1u_2u_3, u_4u_5u_6 \rangle \oplus \left\langle \begin{matrix} u_7u_1u_4, u_7u_2u_5, u_7u_3u_6, \\ u_8u_1u_4, u_8u_2u_5, u_8u_3u_6 \end{matrix} \right\rangle \simeq \mathbf{C}^2 \oplus \mathrm{Mat}(2,3),$$

であるから縮約は,

$$\begin{aligned} (G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^4 \times GL_2, \mathbf{C}^2 \oplus \mathrm{Mat}(2,3)), \\ (t,h).(v_1, v_2, X) &= (t_1t_2t_3v_1, t_4v_2, hX \,\mathrm{diag}(t_1t_4, t_2, t_3)), \\ & \quad (t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_4) \in \mathbf{T}^4, (v_1, v_2, X) \in \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus \mathrm{Mat}(2,3)), \\ f' &= (v_1v_2 \det X_{12} \det X_{23} \det X_{13})^2, \end{aligned}$$

である. ただし, $X_{ij} \in \mathrm{Mat}(2)$ は $X \in \mathrm{Mat}(2,3)$ の i 列と j 列を取り出した小行列であり, $(\mathbf{T}^4 \times GL_2, \mathbf{C}^2 \oplus \mathrm{Mat}(2,3))$ の基本相対不変式が $v_1, v_2, \det X_{12}, \det X_{23}, \det X_{13}$ であることから, 指標を考えると f' が得られる. また b-関数は,

$$\begin{aligned} b_f(s) &= (s+1)(s+3/2)^2(s+11/6)(s+2)^3(s+13/6) \\ & \quad \times (s+7/3)(s+5/2)^3(s+8/3)(s+3)^2(s+7/2), \\ b'_f(s) &= (s+1/3)(s+1/2)^6(s+2/3)(s+5/6)(s+1)^6(s+7/6), \end{aligned}$$

であるからその整数差は,

$$(0,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,3),$$

である. ただし, $b'_f(s)$ は例えば [5] からわかる.

2.8 (8) $(SL_6 \times GL_2, 2\Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(6) \otimes V(2))$

T_f が自明になるため縮約できない.

2.9 (9) $(SL_6 \times GL_2, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(15) \otimes V(2))$

$$\begin{aligned} (G, V) &= (SL_6 \times GL_2, \mathrm{Alt}_6 \oplus \mathrm{Alt}_6), \\ (h,g).(X,Y) &= (hX\,{}^t h, hY\,{}^t h)\,{}^t g, \\ & \quad ((h,g) \in SL_6 \times GL_2, \ (X,Y) \in \mathrm{Alt}_6 \oplus \mathrm{Alt}_6), \end{aligned}$$

と実現する．ただし f は指標 $(\det g)^6$ に対応する相対不変式である．すると

$$\begin{aligned}
v_f &= \left(\begin{pmatrix} & I_3 \\ -I_3 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \Lambda \\ -\Lambda & \end{pmatrix}\right), \\
&\quad (\Lambda = \mathrm{diag}(1, \exp(2\pi\sqrt{-1}/3), \exp(4\pi\sqrt{-1}/3))), \\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \oplus 0 \,\middle|\, A, B, C:\ 3\text{次対角行列}\right\} \simeq \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2, \\
T_f &= \left\{\left(\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}, I_2\right) \,\middle|\, t \in \mathbf{T}^3\right\} \simeq \mathbf{T}^3, \\
Z_G(T_f) &= S\mathbf{T}^6 \times GL_2, \\
G^{(f)} &\simeq \left\{\begin{pmatrix} t & \\ & I_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in S\mathbf{T}^3\right\} \times GL_2 \simeq S\mathbf{T}^3 \times GL_2, \\
V^{(f)} &= \left\{\begin{pmatrix} & Z_1 \\ -Z_1 & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & Z_2 \\ -Z_2 & \end{pmatrix} \,\middle|\, Z_1, Z_2:\ 3\text{次対角行列}\right\} \simeq \mathrm{Mat}(3,2),
\end{aligned}$$

であるから縮約は,

$$\begin{aligned}
(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (S\mathbf{T}^3 \times GL_2, \mathrm{Mat}(3,2)), \\
(t,g).Z &= tZ\,{}^t g, \qquad ((t,g) \in S\mathbf{T}^3 \times GL_2,\ Z \in \mathrm{Mat}(3,2)), \\
f' &= (\det Z_{12} \det Z_{23} \det Z_{13})^2,
\end{aligned}$$

である．ただし, $Z_{ij} \in \mathrm{Mat}(2)$ は $Z \in \mathrm{Mat}(3,2)$ の i 行と j 行を取り出した小行列であり, (7) $(GL_8, \Lambda_3, V(56))$ と同様に指標を考えることにより f' が得られる．また b-関数は,

$$\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)^2(s+2)^2(s+3/2)^2(s+5/2)^2(s+7/3)(s+8/3)(s+5/6)(s+7/6), \\
b'_f(s) &= (s+1)^4(s+1/2)^4(s+1/3)(s+2/3)(s+5/6)(s+7/6),
\end{aligned}$$

である．であるからその整数差は,

$$(0,0,0,0,1,1,1,1,2,2,2,2),$$

である．ただし, $b'_f(s)$ は例えば [5] からわかる．

2.10 (10) $(SL_5 \times GL_3, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(10) \otimes V(3))$

記号は, (5) $(GL_6, \Lambda_3, V(20))$ と同様とする．

$$\begin{aligned}
(G, V) &= (SL_5 \times GL_3, (\textstyle\bigwedge^2 \mathbf{C}^5)^{\oplus 3}), \\
(h,g).(x,y,z) &= (h.x, h.y, h.z)\,{}^t g, \\
&\quad ((h,g) \in SL_5 \times GL_3,\ (x,y,z) \in (\textstyle\bigwedge^2 \mathbf{C}^5)^{\oplus 3}),
\end{aligned}$$

と実現する．ただし, f は $(\det g)^5$ に対応する相対不変式である．すると,

$$\begin{aligned}
v_f &= (u_1u_2 + u_3u_4, u_2u_3 + u_4u_5, u_1u_3 + u_2u_5), \\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & -b & c & 0 & 0 \\ -3c & 2a & 0 & -2b & 0 \\ 3b & 0 & -2a & 0 & 2c \\ 0 & -c & 0 & 4a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & -4a \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & 2a \end{pmatrix}\right\} \simeq \mathfrak{sl}_2, \\
T_f &= \left\{(\mathrm{diag}(1, t, t^{-1}, t^2, t^{-2}), \mathrm{diag}(t^{-1}, 1, t)) \,\middle|\, t \in \mathbf{T}^1\right\}, \\
Z_G(T_f) &= S\mathbf{T}^5 \times \mathbf{T}^3, \\
G^{(f)} &\simeq S\mathbf{T}^5 \times \{\mathrm{diag}(s_1, s_2, 1) | s_j \in \mathbf{T}^1\} \simeq S\mathbf{T}^5 \times \mathbf{T}^2, \\
V^{(f)} &= \langle u_1u_2, u_3u_4 \rangle \oplus \langle u_2u_3, u_4u_5 \rangle \oplus \langle u_1u_3, u_2u_5 \rangle \simeq \mathbf{C}^6,
\end{aligned}$$

であるから縮約は,

$$
\begin{aligned}
(G^{(f)},V^{(f)}) &= (S\mathbf{T}^5\times\mathbf{T}^2,\mathbf{C}^6),\\
(t,s).v &= \mathrm{diag}(t_1t_2s_1,t_3t_4s_1,t_2t_3s_2,t_4t_5s_2,t_1t_3,t_2t_5)v,\\
&\quad (t=\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_5)\in S\mathbf{T}^5, s=\mathrm{diag}(s_1,s_2)\in\mathbf{T}^2, v={}^t(v_1,\dots,v_6)\in\mathbf{C}^6),\\
f' &= v_1^3v_2^2v_3v_4^4v_5^3v_6^2,
\end{aligned}
$$

である. ただし f' は指標を考えることにより得られる. また b-関数は,

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)^3(s+2)^3(s+3/2)^3(s+4/3)^2(s+5/3)^2(s+5/4)(s+7/4),\\
b'_f(s) &= (s+1)^6(s+1/2)^2(s+1/3)^2(s+2/3)^2(s+1/4)(s+2/4)(s+3/4),
\end{aligned}
$$

であるからその整数差は,

$$
(0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1),
$$

である.

2.11 (11) $(SL_5\times GL_4,\Lambda_2\otimes\Lambda_1,V(10)\otimes V(4))$

T_f が自明になるため縮約できない.

2.12 (12) $(SL_3\times SL_3\times GL_2,\Lambda_1\otimes\Lambda_1\otimes\Lambda_1,V(3)\otimes V(3)\otimes V(2))$

$$
\begin{aligned}
(G,V) &= (SL_3\times SL_3\times GL_2,\mathrm{Mat}(3)\oplus\mathrm{Mat}(3)),\\
(a,b,g).(X,Y) &= (aX\,{}^tb,aY\,{}^tb)\,{}^tg,\\
&\quad ((a,b,g)\in SL_3\times SL_3\times GL_2,\ (X,Y)\in\mathrm{Mat}(3)\oplus\mathrm{Mat}(3)),
\end{aligned}
$$

と実現する. ただし, f は $(\det g)^6$ に対応する相対不変式である. すると,

$$
\begin{aligned}
v_f &= \mathrm{diag}(1,1,1)\oplus\mathrm{diag}(1,0,-1),\\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \{(A,-A,0)|A:\ 3\text{次対角行列},\mathrm{Tr}\,A=0\},\\
T_f &= \{(t,t^{-1},I_2)|t\in S\mathbf{T}^3\},\\
Z_G(T_f) &= S\mathbf{T}^3\times S\mathbf{T}^3\times GL_2,\\
G^{(f)} &\simeq S\mathbf{T}^3\times 1\times GL_2\simeq S\mathbf{T}^3\times GL_2,\\
V^{(f)} &= \{(z_1,z_2)|z_j:\ 3\text{次対角行列}\ \}\simeq\mathrm{Mat}(3,2),
\end{aligned}
$$

であるから縮約は,

$$
\begin{aligned}
(G^{(f)},V^{(f)}) &= (S\mathbf{T}^3\times GL_2,\mathrm{Mat}(3,2)),\\
(t,g).Z &= tZ\,{}^tg,\\
&\quad ((t,g)\in S\mathbf{T}^3\times GL_2,\ Z\in\mathrm{Mat}(3,2)),\\
f' &= (\det Z_{12}\det Z_{23}\det Z_{13})^2,
\end{aligned}
$$

である. これは (9) $(SL_6\times GL_2,\Lambda_2\otimes\Lambda_1,V(15)\otimes V(2))$ と同じ縮約である. また b-関数は,

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)^4(s+3/2)^4(s+5/6)(s+7/6)(s+4/3)(s+5/3),\\
b'_f(s) &= (s+1)^4(s+1/2)^4(s+1/3)(s+2/3)(s+5/6)(s+7/6),
\end{aligned}
$$

であるからその整数差は,

$$
(0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1),
$$

2.13 **(13)** $(Sp_n \times GL_{2m}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(2n) \otimes V(2m))$ $(n \geq 2m \geq 2)$

$$\begin{aligned}(G, V) &= (Sp_n \times GL_{2m}, \mathrm{Mat}(2n, 2m)),\\ (g, h).X &= gX\,{}^t\!h, \qquad ((g,h) \in Sp_n \times GL_{2m},\ X \in \mathrm{Mat}(2n, 2m)),\end{aligned}$$

と実現する．ただし，f は具体的な形もそれほど難しくはないが $\det h$ に対応する相対不変式である．すると，

$$\begin{aligned}
v_f &= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} I_m \\ O_{n-m,m}\end{matrix} & O_{n,m} \\ \hline O_{n,m} & \begin{matrix} I_m \\ O_{n-m,m}\end{matrix}\end{array}\right),\\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & & B_1 & \\ & A_4 & & B_4 \\ \hline C_1 & & -{}^tA_1 & \\ & C_4 & & -{}^tA_4 \end{array}\right) \oplus \left(-{}^t\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & -{}^tA_1\end{pmatrix}\right) \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1 \in \mathfrak{gl}_m, \\ A_4 \in \mathfrak{gl}_{n-m}, \\ B_1, C_1 \in \mathrm{Sym}_m, \\ B_4, C_4 \in \mathrm{Sym}_{n-m}\end{array} \right\}\\
&\simeq \mathfrak{sp}_m \oplus \mathfrak{sp}_{n-m},\\
T_f &= \left\{ \left(\left(\begin{array}{cc|cc} t & & & \\ & s & & \\ \hline & & t^{-1} & \\ & & & s^{-1}\end{array}\right), \begin{pmatrix} t^{-1} & \\ & t\end{pmatrix}\right) \;\middle|\; t \in \mathbf{T}^m, s \in \mathbf{T}^{n-m} \right\},\\
Z_G(T_f) &= (\text{diag of } Sp_n) \times \mathbf{T}^{2m},\\
G^{(f)} &\simeq 1 \times \mathbf{T}^{2m} \simeq \mathbf{T}^{2m},\\
V^{(f)} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_1 \\ O_{n-m,m}\end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} x_2 \\ O_{n-m,m}\end{matrix}\end{array}\right) \;\middle|\; x_j:\ m \text{ 次対角行列} \right\}\\
&\simeq \mathbf{C}^{2m},
\end{aligned}$$

であるから縮約は，

$$\begin{aligned}
(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^{2m}, \mathbf{C}^{2m}),\\
t.v &= tv,\\
&\quad (t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_{2m}) \in \mathbf{T}^{2m},\ v = {}^t(v_1, \ldots, v_{2m})),\\
f' &= v_1 \cdots v_{2m},
\end{aligned}$$

である．ただし f' は指標を考えることにより得られる．また b-関数は，

$$\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+3)\cdots(s+2m-1) \times (s+2n-2m+2)\cdots(s+2n-2)(s+2n),\\
b'_f(s) &= (s+1)^{2m},
\end{aligned}$$

であるからその整数差は，

$$(0, 2, 4, \ldots, 2m-2; 2n-2m+1, \ldots, 2n-3, 2n-1),$$

2.14 (14) $(GL_1 \times Sp_3, \Lambda_1 \otimes \Lambda_3, V(1) \otimes V(14))$

記号は, (5) $(GL_6, \Lambda_3, V(20))$ と同様とする. また, (5) の群を Sp_3 に縮めると, $V(20)$ は $V(6) \oplus V(14)$ と既約分解し, その $V(14)$ がこの PV の実現であり,

$$\sum_{i<j<k} a_{ijk} u_i u_j u_k \in V(14) \iff a_{i14} + a_{i25} + a_{i36} = 0 \text{ for all } i \in \{1, \ldots, 6\},$$

である. f は (5) の基本相対不変式を $V(14)$ に制限したものである. すると,

$$\begin{aligned}
v_f &= u_1u_2u_3 + u_4u_5u_6, \\
G_{v_f} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \middle| A \in SL_3 \right\}, \\
T_f &= \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} \middle| t \in S\mathbf{T}^3 \right\}, \\
Z_G(T_f) &= GL_1 \times (\text{diag of } Sp_3), \\
G^{(f)} &\simeq GL_1 \times \{\text{diag}(b, 1, 1, b^{-1}, 1, 1) | b \in \mathbf{T}^1\} \simeq \mathbf{T}^2, \\
V^{(f)} &= \langle u_1u_2u_3, u_4u_5u_6 \rangle \simeq \mathbf{C}^2,
\end{aligned}$$

であるから縮約は,

$$\begin{aligned}
(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^2, \mathbf{C}^2), \\
(a, b).(v_1, v_2) &= (abv_1, ab^{-1}v_2), \\
&\quad ((a, b) \in \mathbf{T}^2, (v_1, v_2) \in \mathbf{C}^2), \\
f' &= v_1^2 v_2^2,
\end{aligned}$$

である. ただし f' は $V^{(f)}$ が (5) の場合と同じであるから, (5) と同じものになる. また b-関数は,

$$\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+2)(s+5/2)(s+7/2), \\
b'_f(s) &= (s+1)^2(s+1/2)^2,
\end{aligned}$$

であるからその整数差は,

$$(0, 1, 2, 3),$$

である.

2.15 (15) $(SO_n \times GL_m, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(n) \otimes V(m))$ $(n \geq 2m \geq 2)$

$$\begin{aligned}
(G, V) &= (SO_n \times GL_m, \text{Mat}(n, m)), \\
(g, h).X &= gX\,{}^th, \qquad ((g, h) \in SO_n \times GL_m,\ X \in \text{Mat}(n, m)), \\
f &= \det {}^tXX,
\end{aligned}$$

と実現すると,

$$\begin{aligned}
v_f &= \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, m), \\
G_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_4 \end{pmatrix}, {}^tA_1^{-1} \right) \middle| A_1 \in O_m, A_4 \in O_{n-m}, \det A_1 \det A_4 = 1 \right\}, \\
T_f &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} t & \\ & s \end{pmatrix}, t^{-1} \right) \middle| t \in \mathbf{T}^m, s \in \mathbf{T}^{n-m}, \det t \det s = 1 \right\}, \\
Z_G(T_f) &= S\mathbf{T}^n \times \mathbf{T}^m, \\
G^{(f)} &\simeq 1 \times \mathbf{T}^m \simeq \mathbf{T}^m, \\
V^{(f)} &= \left\{ \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, m) \middle| Y : m \text{ 次対角行列} \right\} \simeq \mathbf{C}^m,
\end{aligned}$$

であるから縮約は,

$$\begin{aligned}(G^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathbf{T}^m, \mathbf{C}^m),\\ t.v &= tv,\\ &\quad (t \in \mathbf{T}^m,\ v = {}^t(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbf{C}^m),\\ f' &= (v_1 \cdots v_m)^2,\end{aligned}$$

である. また b-関数は,

$$\begin{aligned}b_f(s) &= (s+1)(s+3/2)\cdots(s+(m+1)/2)\\ &\quad \times(s+(n-m+1)/2)\cdots(s+(n-1)/2)(s+n/2),\\ b'_f(s) &= (s+1)^m(s+1/2)^m,\end{aligned}$$

であるからその整数差は,

$$\begin{aligned}m=2l, n=2k \text{ の時}\quad & (0,1,1,2,2,\ldots,l-1,l-1,l;k-l,k-l,\cdots,k-1,k-1),\\ m=2l, n=2k+1 \text{ の時}\quad & (0,1,1,2,2,\ldots,l-1,l-1,l;\\ & k-l,k-l+1,k-l+1,k-l+2,k-l+2,\cdots,k-1,k-1,k),\\ m=2l+1, n=2k \text{ の時}\quad & (0,1,1,2,2,\ldots,l,l;\\ & k-l-1,k-l,k-l,k-l+1,k-l+1,\cdots,k-1,k-1),\\ m=2l+1, n=2k+1 \text{ の時}\quad & (0,1,1,2,2,\ldots,l,l;\\ & k-l,k-l,k-l+1,k-l+1,\cdots,k-1,k-1,k),\end{aligned}$$

である.

2.16 Spin representations

スピン群の (半) スピン表現の微分表現の実現を与える. まず,

$$\mathrm{Lie}(Spin_{2m}) = \mathfrak{o}(2m, \mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathfrak{gl}_m; B, C \in \mathrm{Alt}_m \right\},$$

の偶半スピン表現の実現を与える. 表現空間は

$$V = \bigwedge{}^{+}\mathbf{C}^m := \sum_{k:\ \mathrm{even}} \bigwedge{}^{k}\mathbf{C}^m,$$

であり, $\mathrm{Lie}(Spin_{2m})$ の作用は,

$$\begin{aligned}X.\lambda &= \sum_{i\neq j} a_{ij} e_i \delta_{f_j}\lambda + \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(e_i\delta_{f_i} - 1/2)\lambda + \sum_{i<j} b_{ij} e_i e_j \lambda + \sum_{i<j} c_{ij}\delta_{f_i}\delta_{f_j}\lambda,\\ &\quad \left(X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}(Spin_{2m}),\ \lambda \in \bigwedge{}^{+}\mathbf{C}^m\right),\end{aligned}$$

であり, ここで, $\{e_i\}$ は $\mathbf{C}^m$ の ONB, $\{f_i\}$ はその dual basis であり,

$$\begin{aligned}\delta_x(v_1\cdots v_k) &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\langle x|v_i\rangle(v_1\cdots \hat{v}_i \cdots v_k),\\ &\quad (x \in (\mathbf{C}^m)^*),\end{aligned}$$

である. ただし, $v_j \in \mathbf{C}^m$ に対して, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ を, $v_1 \cdots v_k$ と略記している.

$$\mathrm{Lie}(Spin_{2m-1}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & -{}^tA \end{array} \right) \in \mathfrak{o}(2m, \mathbf{C}) \,\middle|\, a_{im} + b_{im} = 0, c_{im} - a_{mi} = 0, (i = 1, \ldots, m) \right\},$$

のスピン表現は, $\mathrm{Lie}(Spin_{2m})$ の偶半スピン表現を $\mathrm{Lie}(Spin_{2m-1})$ に制限したものとして定義される.

$\mathrm{Lie}(Spin_{2m})$ の偶半スピン表現は, D_m 型単純リー代数の既約表現であって, その最高ウェイトがブルバキの番号づけで ϖ_{m-1} であるものであり, $\mathrm{Lie}(Spin_{2m-1})$ のスピン表現は, B_{m-1} 型単純リー代数の既約表現であって, その最高ウェイトがブルバキの番号づけで ϖ_{m-1} であるものである. ともに次元は 2^{m-1} である.

これらの作用を一般の m に対して書き下すことは難しいが, $\mathrm{Lie}(Spin_n)$ の対角成分の作用ならば容易で, 以下のように書き下せる.

$$\begin{aligned} H_i &= E_{ii} - E_{m+i,m+i} \in \mathrm{Lie}(Spin_{2m}) \text{ の時}, \\ H_j.e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} &= \begin{cases} -(1/2)e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} & (j \notin \{i_1, \ldots, i_{2k}\}), \\ (1/2)e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} & (j \in \{i_1, \ldots, i_{2k}\}), \end{cases} \end{aligned}$$

2.17 (16) $(GL_1 \times Spin_7, \Lambda_1 \otimes spin, V(1) \otimes V(8))$

GL_1 の自然表現と $Spin_7$ のスピン表現のテンソル積表現として実現する. f は $(\det g)^2$ $(g \in GL_1)$ に対応する基本相対不変式である. また具体的な形も簡単である. すると,

$$\begin{aligned} v_f &= 1 + e_1e_2e_3e_4, \\ \mathfrak{g}_{v_f} &= 0 \oplus \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & -{}^tA \end{array} \right) \in \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathrm{Lie}(Spin_7) \,\middle|\, \begin{array}{c} a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, \\ b_{12} = c_{34}, b_{13} = -c_{24}, b_{14} = c_{23}, \\ c_{12} = b_{34}, c_{13} = -b_{24}, c_{14} = b_{23} \end{array} \right\} \\ &\simeq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_2), \\ \mathfrak{t}_f &= 0 \oplus \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, 0, -t_1, -t_2, -t_3, 0) | t_j \in \mathbf{C}, t_1 + t_2 + t_3 = 0\}, \\ Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, 0, -t_1, -t_2, -t_3, 0) | t_j \in \mathbf{C}\}, \\ \mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(a, 0, 0, 0, -a, 0, 0, 0) | a \in \mathbf{C}\} \simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1, \\ V^{(f)} &= \langle 1, e_1e_2e_3e_4 \rangle \simeq \mathbf{C}^2, \end{aligned}$$

であるから縮約（の微分）は,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathfrak{gl}_1^{\oplus 2}, \mathbf{C}^2), \\ (d, a).{}^t(v_1, v_2) &= {}^t((d - a/2)v_1, (d + a/2)v_2), \\ &\quad ((d, a) \in \mathfrak{gl}_1^{\oplus 2}, {}^t(v_1, v_2) \in \mathbf{C}^2), \\ f' &= v_1v_2, \end{aligned}$$

である. ただし f' は指標を考えることで得られるし, 具体的に制限することでも容易にわかる. また b-関数は,

$$\begin{aligned} b_f(s) &= (s + 1)(s + 4), \\ b'_f(s) &= (s + 1)^2, \end{aligned}$$

であるからその整数差は,

$$(0, 3),$$

2.18 **(17)** $(Spin_7 \times GL_2, spin \otimes \Lambda_1, V(8) \otimes V(2))$

$$\begin{array}{rcl} (G,V) &=& (Spin_7 \times GL_2, \bigwedge^+ \mathbf{C}^4 \oplus \bigwedge^+ \mathbf{C}^4), \\ (g,h).(x,y) &=& (g.x, g.y)\, {}^t h, \\ && ((g,h) \in Spin_7 \times GL_2,\ (x,y) \in \bigwedge^+ \mathbf{C} \oplus \bigwedge^+ \mathbf{C}), \end{array}$$

と実現する．f は $(\det h)^2$ に対応する基本相対不変式であり，また，具体的な形も簡単である．すると，

$$\begin{array}{rcl} v_f &=& 1 \oplus e_1e_2e_3e_4, \\ \mathfrak{g}_{v_f} &=& \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & -{}^tA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \alpha & \\ & -\alpha \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}_3, \alpha = (\mathrm{Tr}\, A)/2 \right\} \\ &\simeq& \mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{o}_2, \\ \mathfrak{t}_f &=& \{\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3,0,-t_1,-t_2,-t_3,0) \oplus \mathrm{diag}(\alpha,-\alpha) | t_j \in \mathbf{C}, \alpha = (t_1+t_2+t_3)/2\}, \\ Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &=& \{\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3,0,-t_1,-t_2,-t_3,0) | t_j \in \mathbf{C}\} \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \\ \mathfrak{g}^{(f)} &\simeq& 0 \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2) \simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \\ V^{(f)} &=& \langle 1 \rangle \oplus \langle e_1e_2e_3e_4 \rangle \simeq \mathbf{C}^2, \end{array}$$

であるから縮約（の微分）は，

$$\begin{array}{rcl} (\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &=& (\mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \mathbf{C}^2), \\ t.v &=& tv, \\ && (t = \mathrm{diag}(t_1,t_2) \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2),\ v = {}^t(v_1,v_2) \in \mathbf{C}^2), \\ f' &=& v_1^2 v_2^2, \end{array}$$

である．ただし f' は指標を考えることで得られるし，具体的に制限することでも容易にわかる．また b-関数は，

$$\begin{array}{rcl} b_f(s) &=& (s+1)(s+3/2)(s+7/2)(s+4), \\ b'_f(s) &=& (s+1)^2(s+1/2)^2, \end{array}$$

であるからその整数差は，

$$(0,1,3,3),$$

である．

2.19 **(18)** $(Spin_7 \times GL_3, spin \otimes \Lambda_1, V(8) \otimes V(3))$

$$\begin{array}{rcl} (G,V) &=& (Spin_7 \times GL_3, (\bigwedge^+ \mathbf{C})^{\oplus 3}), \\ (g,h).(x,y,z) &=& (g.x, g.y, g.z)\, {}^t h, \\ && ((g,h) \in Spin_7 \times GL_3, (x,y,z) \in (\bigwedge^+ \mathbf{C})^{\oplus 3}), \\ f &=& \det {}^tXX, \\ && (X = (x,y,z) \in (\bigwedge^+ \mathbf{C})^{\oplus 3} \simeq \mathrm{Mat}(8,3)), \end{array}$$

と実現すると，

$$v_f = (1, e_1e_2e_3e_4, e_1e_2 - e_3e_4),$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
a_1 & a_{12} & & & & b_{12} & & \\
a_{21} & a_2 & & & -b_{12} & & & \\
\hline
 & & a_3 & -b_{12} & & & & -b_{12} \\
 & & c_{12} & & & & b_{12} & \\
\hline
 & c_{12} & & & -a_1 & -a_{21} & & \\
-c_{12} & & & & -a_{12} & -a_2 & & \\
\hline
 & & & -c_{12} & & & -a_3 & -c_{12} \\
 & & c_{12} & & & & b_{12} &
\end{array} \right) \oplus \begin{pmatrix} a_3 & & -b_{12} \\ & -a_3 & -c_{12} \\ 2c_{12} & 2b_{12} & \end{pmatrix} \middle| \ a_3 = a_1 + a_2 \right\} \\
&\simeq \mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{o}_3, \\
\mathfrak{t}_f &= \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, 0, -t_1, -t_2, -t_3, 0) \oplus \mathrm{diag}(t_3, -t_3, 0) | t_j \in \mathbf{C}, t_3 = t_1 + t_2\}, \\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, 0, -t_1, -t_2, -t_3, 0) | t_j \in \mathbf{C}\} \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \{\mathrm{diag}(a, 0, 0, 0, -a, 0, 0, 0) | a \in \mathbf{C}\} \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3) \simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \\
V^{(f)} &= \langle 1 \rangle \oplus \langle e_1e_2e_3e_4 \rangle \oplus \langle e_1e_2, e_3e_4 \rangle \simeq \mathbf{C}^4,
\end{aligned}
$$

であるから縮約（の微分）は,

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \mathbf{C}^4), \\
(a \oplus s).v &= (1/2)\,{}^t\!((-a + 2s_1)v_1, (a + 2s_2)v_2, (a + 2s_3)v_3, (-a + 2s_3)v_4), \\
&\quad ((a \oplus s) \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3),\ v = {}^t\!(v_1, \ldots, v_4) \in \mathbf{C}^4), \\
f' &= v_1^2 v_2^2 (v_3^2 + v_4^2),
\end{aligned}
$$

である. また b-関数は,

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+3/2)(s+2)(s+3)(s+7/2)(s+4), \\
b'_f(s) &= (s+1)^4 (s+1/2)^2,
\end{aligned}
$$

である. ただし, $b'_f(s)$ は (15) の PV の b-関数を用いるとわかる. そしてこれらの整数差は,

$$(0, 1, 1, 2, 3, 3),$$

である.

2.20 (19) $(GL_1 \times Spin_9, \Lambda_1 \otimes spin, V(1) \otimes V(16))$

GL_1 の自然表現と $Spin_9$ のスピン表現のテンソル積表現として実現する. 基本相対不変式 f は $(\det g)^2$ 指標 $(g \in GL_1)$ に対応する. また具体的な形も難しくはない. すると

$$
\begin{aligned}
v_f &= 1 + e_1e_2e_3e_4 \in {\textstyle\bigwedge}^+ \mathbf{C}^5, \\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc}
A & & B & \\
 & 0 & & 0 \\
\hline
C & & -{}^tA & \\
 & 0 & & 0
\end{array} \right) \middle| \ \begin{array}{l} A \in \mathfrak{sl}_4 \\ B \in \mathrm{Alt}_4 \end{array}, C = \begin{pmatrix} 0 & b_{34} & -b_{24} & b_{23} \\ -b_{34} & 0 & b_{14} & -b_{13} \\ b_{24} & -b_{14} & 0 & b_{12} \\ -b_{23} & b_{13} & -b_{12} & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\simeq \mathfrak{o}_7, \\
\mathfrak{t}_f &= 0 \oplus \{\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_4, 0, -t_1, \ldots, -t_4, 0) | \,\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_4) \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^4)\}, \\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_4, 0, -t_1, \ldots, -t_4, 0) | \,\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_4) \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^4)\}, \\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(a, 0, 0, 0, 0, -a, 0, 0, 0, 0) | a \in \mathbf{C}\} \simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1), \\
V^{(f)} &= \langle 1, e_1e_2e_3e_4 \rangle \simeq \mathbf{C}^2,
\end{aligned}
$$

であるから縮約（の微分）は,

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1), \mathbf{C}^2), \\
(b, a).{}^t\!(v_1, v_2) &= {}^t\!((b + a/2)v_1, (b - a/2)v_2), \\
&\quad ((b, a) \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^1),\ v = {}^t\!(v_1, v_2) \in \mathbf{C}^2), \\
f' &= v_1 v_2,
\end{aligned}
$$

である．また b-関数は，

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+8), \\
b'_f(s) &= (s+1)^2,
\end{aligned}
$$

である．これらの整数差は，

$$
(0,7),
$$

である．

2.21 **(20)** $(Spin_{10} \times GL_2, half spin \otimes \Lambda_1, V(16) \otimes V(2))$

$$
\begin{aligned}
(G,V) &= (Spin_{10} \times GL_2, (\textstyle\bigwedge^+ \mathbf{C}^5)^{\oplus 2}), \\
(g,h).(x,y) &= (g.x, g.y)\,{}^t h, \\
&\quad ((g,h) \in Spin_{10} \times GL_2,\ (x,y) \in \textstyle\bigwedge^+ \mathbf{C}^5)^{\oplus 2}),
\end{aligned}
$$

と実現する．f は $(\det h)^2$ に対応する基本相対不変式である．すると

$$
\begin{aligned}
v_f &= (1 + e_1e_2e_3e_4, e_1e_5 + e_2e_3e_4e_5), \\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 & a_{21} & a_{31} & a_{41} & -d_{21} \\ -a_{21} & 0 & -a_{14} & a_{13} & 0 \\ -a_{31} & a_{14} & 0 & -a_{12} & 0 \\ -a_{41} & -a_{13} & a_{12} & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & d_{12} \\ a_{12} & 0 & a_{41} & -a_{31} & 0 \\ a_{13} & -a_{41} & 0 & a_{21} & 0 \\ a_{14} & a_{31} & -a_{21} & 0 & 0 \\ -d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & -{}^tA \end{array} \right) \oplus \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & -d_{11} \end{pmatrix} \right| \\
&\qquad A = \left. \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & d_{12} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \end{pmatrix}, a_2 + a_3 + a_4 = 0 \right\} \\
&\simeq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_2) \oplus \mathfrak{sl}_2, \\
\mathfrak{t}_f &= \{\mathrm{diag}(0, a_2, a_3, a_4, 2d, 0, -a_2, -a_3, -a_4, -2d) \oplus \mathrm{diag}(d, -d) | a_2 + a_3 + a_4 = 0\}, \\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & -t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^5) \right\} \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, 0, 0, 0, -t_1, -t_2, 0, 0, 0) | t_1, t_2 \in \mathbf{C}\} \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2) \\
&\simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \\
V^{(f)} &= \langle 1, e_1e_2e_3e_4 \rangle \oplus \langle e_1e_5, e_2e_3e_4e_5 \rangle \simeq \mathbf{C}^4,
\end{aligned}
$$

であるから縮約（の微分）は，

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \mathbf{C}^4), \\
(t,s).{}^t(v_1, \ldots, v_4) &= \begin{pmatrix} (-(t_1+t_2)/2 + s_1)v_1 \\ ((t_1+t_2)/2 + s_1)v_2 \\ ((t_1-t_2)/2 + s_2)v_3 \\ (-(t_1-t_2)/2 + s_2)v_4 \end{pmatrix}, \\
&\quad ((t,s) = (\mathrm{diag}(t_1,t_2), \mathrm{diag}(s_1,s_2)) \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \\
&\quad\ {}^t(v_1, \ldots, v_4) \in \mathbf{C}^4), \\
f' &= v_1v_2v_3v_4,
\end{aligned}
$$

である．f' は指標を考えることで得られる．また b-関数は，

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+4)(s+5)(s+8), \\
b'_f(s) &= (s+1)^4,
\end{aligned}
$$

である．これらの整数差は，

$$
(0,3,4,7),
$$

である．

2.22 **(21)** $(Spin_{10} \times GL_3, halfspin \otimes \Lambda_1, V(16) \otimes V(3))$

$$
\begin{aligned}
(G,V) &= (Spin_{10} \times GL_3, (\textstyle\bigwedge^+ \mathbf{C}^5)^{\oplus 3}), \\
(g,h).(x,y,z) &= (g.x, g.y, g.z)\,{}^t h, \\
&\quad ((g,h) \in Spin_{10} \times GL_3,\ (x,y) \in \textstyle\bigwedge^+ \mathbf{C}^5)^{\oplus 3}),
\end{aligned}
$$

と実現する．f は $(\det h)^4$ に対応する基本相対不変式である．すると

$$
\begin{aligned}
v_f &= (1 + e_1e_2e_3e_4, e_1e_5 + e_2e_3e_4e_5, e_1e_2 + e_1e_3e_4e_5), \\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} & 3c_{34} & & & \\ -3c_{34} & & & & \\ & & & c_{12} & \\ & & -c_{12} & & \\ & & & & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & c_{12} & & & \\ -c_{12} & & & & \\ & & & c_{34} & \\ & & -c_{34} & & \\ & & & & 0 \end{matrix} & -{}^tA \end{array} \right) \oplus \begin{pmatrix} d_{11} & & -2c_{34} \\ & -d_{11} & 2c_{12} \\ c_{12} & -c_{34} & \end{pmatrix} \middle| \right. \\
&\qquad \left. A = \begin{pmatrix} & -3c_{12} & & & \\ c_{34} & d_{11} & & & -2c_{12} \\ & & a_3 & a_{34} & \\ & & a_{43} & -a_3 - d_{11} & \\ & 2c_{34} & & & 2d_{11} \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{o}_3, \\
\mathfrak{t}_f &= \{\mathrm{diag}(0,d,a,-a-d,2d,0,-d,-a,a+d,-2d,0) \oplus \mathrm{diag}(d,-d,0) | a,c \in \mathbf{C}\}, \\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Lie}(\mathfrak{t}_f)) &= \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & -t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^5) \right\} \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \{\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3,0,0,-t_1,-t_2,-t_3,0,0) | t_j \in \mathbf{C}\} \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3) \\
&\simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \\
V^{(f)} &= \langle 1, e_1e_2e_3e_4 \rangle \oplus \langle e_1e_5, e_2e_3e_4e_5 \rangle \oplus \langle e_1e_2, e_1e_3e_4e_5 \rangle \\
&\simeq \mathbf{C}^6,
\end{aligned}
$$

であるから縮約（の微分）は，

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \mathbf{C}^6), \\
(t,s).{}^t(v_1,\ldots,v_6) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-t_1 - t_2 - t_3 + 2s_1)v_1 \\ (t_1 + t_2 + t_3 + 2s_1)v_2 \\ (t_1 - t_2 - t_3 + 2s_2)v_3 \\ (-t_1 + t_2 + t_3 + 2s_2)v_4 \\ (t_1 + t_2 - t_3 + 2s_3)v_5 \\ (t_1 - t_2 + t_3 + 2s_3)v_6 \end{pmatrix}, \\
&\quad ((t,s) = (\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3), \mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)) \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3) \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \\
&\quad {}^t(v_1,\ldots,v_6) \in \mathbf{C}^6), \\
f' &= v_1^3 v_2 v_3 v_4^3 v_5^2 v_6^2,
\end{aligned}
$$

である．f' は指標を考えることで得られる．また b-関数は，

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+3/2)(s+5/3)(s+2)^2(s+7/3)\\
&\qquad \times(s+8/3)(s+3)^2(s+10/3)(s+7/2)(s+4),\\
b'_f(s) &= (s+1)^6(s+1/2)^2(s+1/3)^2(s+2/3)^2,
\end{aligned}
$$

である．これらの整数差は，

$$(0,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3),$$

である．

2.23 **(22)** $(GL_1 \times Spin_{11}, \Lambda_1 \otimes spin, V(1) \otimes V(32))$

GL_1 の自然表現と $Spin_{11}$ のスピン表現のテンソル積表現として実現する．f は $(\det g)^4$ $(g \in GL_1)$ に対応する基本相対不変式である．すると

$$
\begin{aligned}
v_f &= 1+e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\\
\mathfrak{g}_{v_f} &= 0 \oplus \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} A & & & \\ & 0 & & \\ \hline & & -{}^tA & \\ & & & 0 \end{array} \right) \in \mathrm{Lie}(Spin_{11}) \,\middle|\, A \in \mathfrak{sl}_5 \right\},\\
\mathfrak{t}_f &= 0 \oplus \{\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_5,0,-t_1,\ldots,-t_5,0) | t_1+\cdots t_5=0\},\\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_5,0,-t_1,\ldots,-t_5,0) | t_j \in \mathbf{C}\},\\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(b,0,0,0,0,0,-b,0,0,0,0,0) | b \in \mathbf{C}\} \simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1,\\
V^{(f)} &= \langle 1, e_1e_2e_3e_4e_5e_6\rangle, \simeq \mathbf{C}^2,
\end{aligned}
$$

であるから縮約（の微分）は，

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1, \mathbf{C}^2),\\
(a,b).{}^t(v_1,v_2) &= {}^t((a-b/2)v_1, (a+b/2)v_2),\\
&\qquad ((a,b) \in \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1,\ {}^t(v_1,v_2) \in \mathbf{C}^2),\\
f' &= v_1^2v_2^2,
\end{aligned}
$$

である．f' は指標を考えることで得られる．また b-関数は，

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+7/2)(s+11/3)(s+8),\\
b'_f(s) &= (s+1)^2(s+1/2)^2,
\end{aligned}
$$

である．これらの整数差は，

$$(0,3,5,7),$$

である．

2.24 **(23)** $(GL_1 \times Spin_{12}, \Lambda_1 \otimes halfspin, V(1) \otimes V(32))$

GL_1 の自然表現と $Spin_{12}$ の偶半スピン表現のテンソル積表現として実現する．基本相対不変式 f は $(\det g)^4$ $(g \in GL_1)$ に対応する．すると

$$v_f = 1+e_1e_2e_3e_4e_5e_6,$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{v_f} &= 0 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & -{}^tA \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{sl}_6 \right\}, \\
\mathfrak{t}_f &= 0 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & -t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^6) \right\}, \\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \mathfrak{gl}_1 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & -t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^6) \right\}, \\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(b,0,0,0,0,0,-b,0,0,0,0,0) | b \in \mathbf{C}\} \simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1, \\
V^{(f)} &= \langle 1, e_1e_2e_3e_4e_5e_6 \rangle \simeq \mathbf{C}^2,
\end{aligned}
$$

であるから縮約（の微分）は (22) と全く同じで，

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1, \mathbf{C}^2), \\
(a,b).{}^t(v_1, v_2) &= {}^t((a-b/2)v_1, (a+b/2)v_2), \\
& \quad ((a,b) \in \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1,\ {}^t(v_1,v_2) \in \mathbf{C}^2), \\
f' &= v_1^2 v_2^2,
\end{aligned}
$$

である．また b-関数は，

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+7/2)(s+11/2)(s+8), \\
b'_f(s) &= (s+1)^2(s+1/2)^2,
\end{aligned}
$$

である．これらの整数差は，

$$
(0,3,5,7),
$$

である．

2.25 (24) $(GL_1 \times Spin_{14}, \Lambda_1 \otimes halfspin, V(1) \otimes V(64))$

GL_1 の自然表現と $Spin_{14}$ の偶半スピン表現のテンソル積表現として実現する．基本相対不変式 f は $(\det g)^8$ $(g \in GL_1)$ に対応する．すると

$$
\begin{aligned}
v_f &= 1 + e_1e_2e_3e_7 + e_4e_5e_6e_7 + e_1e_2e_3e_4e_5e_6, \\
\mathfrak{g}_{v_f} &= 0 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & -{}^tA_1 \end{pmatrix} \middle| A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} X & & * \\ & Y & * \\ \hline * & * & \end{array} \right), X, Y \in \mathfrak{sl}_3; A_2, A_3 \text{ は略} \right\} \\
&\simeq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_2) \oplus \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_2), \\
\mathfrak{t}_f &= 0 \oplus \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} s & & & & & \\ & t & & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & -s & & \\ & & & & -t & \\ & & & & & 0 \end{array} \right) \middle| s, t \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \right\}, \\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \mathfrak{gl}_1 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & -t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^7) \right\}, \\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(t_1,0,0,0,0,t_6,t_7,-t_1,0,0,0,0,-t_6,-t_7) | t_j \in \mathbf{C}\} \\
&\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \\
V^{(f)} &= \langle 1, e_1e_2e_3e_7, e_4e_5e_6e_7, e_1e_2e_3e_4e_5e_6 \rangle \simeq \mathbf{C}^4,
\end{aligned}
$$

であるから縮約（の微分）は，

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathfrak{gl}_1 \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), \mathbf{C}^4),\\
(a, t_1, t_6, t_7).\,{}^t(v_1, \ldots, v_4) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2a - t_1 - t_6 - t_7)v_1 \\ (2a + t_1 - t_6 + t_7)v_2 \\ (2a - t_1 + t_6 + t_7)v_3 \\ (2a + t_1 + t_6 - t_7)v_4 \end{pmatrix},\\
& \quad (a \in \mathfrak{gl}_1, (t_1, t_6, t_7) \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^3), {}^t(v_1, \ldots, v_4) \in \mathbf{C}^4),\\
f' &= (v_1 v_2 v_3 v_4)^2,
\end{aligned}$$

である．また b-関数は，

$$\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+5/2)(s+7/2)(s+4)(s+5)(s+11/2)(s+13/2)(s+8),\\
b'_f(s) &= (s+1)^4(s+1/2)^4,
\end{aligned}$$

である．これらの整数差は，

$$(0, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7),$$

である．

2.26 (25) $(GL_1 \times \mathrm{G}_2, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2, V(1) \otimes V(7))$

まず, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_2)$ の実現は，

$$\mathfrak{g}_2 = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 2d & 2e & 2f & 2a & 2b & 2c \\ \hline a & & & & 0 & f & -e \\ b & & X & & -f & 0 & d \\ c & & & & e & -d & 0 \\ \hline d & 0 & -c & b & & & \\ e & c & 0 & -a & & -{}^tX & \\ f & -b & a & 0 & & & \end{array} \right) \middle|\, a, \ldots, f \in \mathbf{C}, X \in \mathfrak{sl}_3 \right\} \subset \mathfrak{gl}_7,$$

で与えられる．((6) の PV の $\mathfrak{g}_{v_f}$ も参照)．そして G_2 の表現 Λ_2 は，この実現を $\mathbf{C}^7$ に自然に作用させたものである．したがって GL_1 の自然表現と G_2 の表現 Λ_2 のテンソル積表現としてこの PV を実現する．

$$f = v_1^2 - 4(v_2 v_5 + v_3 v_6 + v_4 v_7), \quad ({}^t(v_1, \ldots, v_7) \in \mathbf{C}^7),$$

である．すると

$$\begin{aligned}
v_f &= {}^t(1, 0, \ldots, 0),\\
\mathfrak{g}_{v_f} &= 0 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & X & \\ & & -{}^tX \end{pmatrix} \middle|\, X \in \mathfrak{sl}_3 \right\},\\
\mathfrak{t}_f &= 0 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & t & \\ & & -t \end{pmatrix} \middle|\, t \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \right\},\\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \mathfrak{gl}_1 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & t & \\ & & -t \end{pmatrix} \middle|\, t \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \right\},\\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus 0 \simeq \mathfrak{gl}_1,\\
V^{(f)} &= \mathbf{C}\,{}^t(1, 0, \ldots, 0) \simeq \mathbf{C},
\end{aligned}$$

であるから縮約（の微分）は，

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathfrak{gl}_1, \mathbf{C}), \\
a.v_1 &= av_1, \qquad (a \in \mathfrak{gl}_1, v_1 \in \mathbf{C}), \\
f' &= v_1^2,
\end{aligned}
$$

である．また b-関数は，

$$
\begin{aligned}
b_f(s) &= (s+1)(s+7/2), \\
b'_f(s) &= (s+1)(s+1/2),
\end{aligned}
$$

である．これらの整数差は，

$$(0, 3),$$

である．

2.27 (26) $(\mathrm{G}_2 \times GL_2, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(7) \otimes V(2))$

G_2 の C^7 上の表現は (25) の PV で用いたものである．

$$
\begin{aligned}
(G, V) &= (\mathrm{G}_2 \times GL_2, \mathrm{Mat}(7,2)), \\
(g, h).X &= gX\,{}^t h, \\
&\qquad ((g,h) \in \mathrm{G}_2 \times GL_2, X \in \mathrm{Mat}(7,2)), \\
f &= \det {}^t X X,
\end{aligned}
$$

と実現する．すると，

$$
\begin{aligned}
v_f &= {}^t\begin{pmatrix} 0100000 \\ 0000100 \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline & \begin{matrix}\alpha & \\ & X\end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix}-\alpha & \\ & -{}^t X\end{matrix} \end{array}\right) \oplus \begin{pmatrix} -\alpha & \\ & -\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; X \in \mathfrak{gl}_2, \mathrm{Tr}\, X + \alpha = 0 \right\}, \\
\mathfrak{t}_f &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & t & \\ & & -t \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -t_1 & \\ & t_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3) \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \right\} \\
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & t & \\ & & -t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \right\} \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \\
\mathfrak{g}^{(f)} &\simeq 0 \oplus \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2) \simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \\
V^{(f)} &= \mathbf{C}\,{}^t\begin{pmatrix} 0100000 \\ 0000000 \end{pmatrix} + \mathbf{C}\,{}^t\begin{pmatrix} 0000000 \\ 0000100 \end{pmatrix} \simeq \mathbf{C}^2,
\end{aligned}
$$

であるから縮約（の微分）は，

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2), \mathbf{C}^2), \\
t.v &= tv, \\
&\qquad (t = \mathrm{diag}(t_1, t_2) \in \mathrm{Lie}(\mathbf{T}^2),\ v = {}^t(v_1, v_2) \in \mathbf{C}^2), \\
f' &= v_1^2 v_2^2,
\end{aligned}
$$

である．また b-関数は，

$$\begin{aligned} b_f(s) &= (s+1)(s+3/2)(s+3)(s+7/2), \\ b'_f(s) &= (s+1)^2(s+1/2)^2, \end{aligned}$$

である．これらの整数差は，

$$(0,1,2,3),$$

である．

2.28 E_6 の 27 次元表現の実現

E_6 の 27 次元表現とは，その最高ウェイトがブルバキの番号づけで ϖ_1 であるような既約表現である．[7] や [6] による Jordan 代数を用いた実現よりは，[3] の E_7 の実現から作るのが普通と思われる．しかしここでは直接 E_6 の 27 次元表現を実現している [1] の実現を用いることにする．

$$\begin{aligned} V_i &= \mathbf{C}^3 \quad (i=1,2,3), \\ L_i &= \mathfrak{sl}(V_i) \simeq \mathfrak{sl}_3 \quad (i=1,2,3), \\ L &= L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \\ A &= L + V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 + V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*, \\ W &= V_1 \otimes V_2^* + V_2 \otimes V_3^* + V_3 \otimes V_1^*, \end{aligned}$$

と置くと，A が $\mathrm{Lie}(\mathrm{E}_6)$ の実現，W がその 27 次元表現の実現になる．以下にその作用を述べる．

V_i と V_i^* のカップリングを $(\cdot|\cdot)$ で表し，

$$\textstyle\bigwedge^3 V_i \simeq \mathbf{C}, \quad \bigwedge^2 V_i \simeq V_i^*, \\ \textstyle\bigwedge^3 V_i^* \simeq \mathbf{C}, \quad \bigwedge^2 V_i^* \simeq V_i,$$

なる同一視を固定し，$\wedge$ は省略して $\bigwedge^3 V_i$ などの元を書くことにする．第 1 に L の W への作用は自然である．つまり L_i の V_j や V_j^* への作用は $i=j$ の時自然，$i \neq j$ の時自明とし，$V_i \otimes V_j^*$ への作用はテンソル積表現による作用とする．第 2 に，$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ の $V_i \otimes V_j^*$ 上の作用は，

$$(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3).(v_i \otimes v_j^*) = (v_j^*|u_j) u_k \otimes u_i v_i \in V_k \otimes V_i^* \quad (k \neq i,j),$$

であり，第 3 に，$V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*$ の $V_i \otimes V_j^*$ 上の作用は，

$$(u_1^* \otimes u_2^* \otimes u_3^*).(v_i \otimes v_j^*) = (u_i^*|v_i) u_j^* v_j^* \otimes u_k^* \in V_j \otimes V_k^* \quad (k \neq i,j),$$

である．

ここで

$$L \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_1 & & \\ & \varphi_2 & \\ & & \varphi_3 \end{pmatrix} \middle| \varphi_j \in \mathfrak{sl}_3 \right\} \subset \mathrm{End}(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3),$$

$$W \simeq \left\{ \begin{pmatrix} & A & \\ & & B \\ C & & \end{pmatrix} \middle| A,B,C \in \mathrm{Mat}(3) \right\} \subset \mathrm{End}(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3),$$

とみなすと，特に L の W への作用は，ちょうど $\mathrm{End}(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3)$ の中でのブラケット積になる．

さて，この 27 次元表現は faithful であるから，$\mathrm{End}(W)$ の Lie ブラケットを引き戻せば，A のブラケット relation が得られ，以下のようになる．第 1 に L の元どうしのブラケット積は容易な計算

により，再び $\mathrm{End}(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3)$ の中でのブラケット積になる．第2に L と $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ のブラケット積は計算により

$$\begin{aligned}[\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3, u_1 \otimes u_2 \otimes u_3] &= (\varphi_1 u_1) \otimes u_2 \otimes u_3 + u_1 \otimes (\varphi_2 u_2) \otimes u_3 + u_1 \otimes u_2 \otimes (\varphi_3 u_3) \\ &\in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3,\end{aligned}$$

L と $V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*$ のブラケット積も，上の φ が $-{}^t\varphi$ に変わるだけである．第3に残りのブラケット relation は [1] に明示されていて，

$$\begin{aligned}[t_1 \otimes t_2 \otimes t_3, u_1 \otimes u_2 \otimes u_3] &= -(t_1 u_1) \otimes (t_2 u_2) \otimes (t_3 u_3) \ \in V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*, \\ [t_1^* \otimes t_2^* \otimes t_3^*, u_1^* \otimes u_2^* \otimes u_3^*] &= -(t_1^* u_1^*) \otimes (t_2^* u_2^*) \otimes (t_3^* u_3^*) \ \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \\ [t_1^* \otimes t_2^* \otimes t_3^*, u_1 \otimes u_2 \otimes u_3] &= \sum_{i=1}^{3} (t_j^*|u_j)(t_k^*|u_k)\pi(u_i \otimes t_i^*) \ \in L \quad (i,j,k \text{ distinct}), \\ &\quad (t_i, u_i \in V_i, t_i^*, u_i^* \in V_i^*),\end{aligned}$$

ただし π は，

$$\begin{array}{cccl} \pi: \ V_i \otimes V_i^* & \longrightarrow & L_i & ; x \mapsto x - (1/3)(\mathrm{Tr}\, x)\, \mathrm{id}_{V_i}, \\ \wr| & & || & \\ \mathfrak{gl}(V_i) & & \mathfrak{sl}(V_i) & \end{array}$$

である．

2.29 (27) $(GL_1 \times \mathrm{E}_6, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(1) \otimes V(27))$

GL_1 の自然表現と E_6 の 27 次元表現のテンソル積表現として実現する．前の項の記号をそのまま用いる．[1] により，

$$f\begin{pmatrix} & A & \\ & & B \\ C & & \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(ABC) - \det A - \det B - \det C,$$

である．すると，

$$\begin{aligned} v_f &= \begin{pmatrix} & I_3 & \\ & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{v_f} &= (\mathfrak{g}_{v_f} \cap L) \oplus (\mathfrak{g}_{v_f} \cap V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \oplus (\mathfrak{g}_{v_f} \cap V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^*), \\ \mathfrak{g}_{v_f} \cap L &= \{\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \in L | \varphi_1 = \varphi_2\} \quad (\text{他は略}), \\ \mathfrak{t}_f &= \{t \oplus t \oplus s | t, s \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3)\} \subset L, \\ Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \mathfrak{gl}_1 \oplus (\mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \oplus \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \oplus \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3)) \subset \mathfrak{gl}_1 \oplus L, \\ \mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus (\mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \oplus 0 \oplus 0) \\ &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3) \\ V^{(f)} &= \left\{ \begin{pmatrix} & Y & \\ & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix} \in W \,\middle|\, Y: \text{3次対角行列} \right\} \simeq \mathbf{C}^3, \end{aligned}$$

であるから縮約（の微分）は，

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathfrak{gl}_1 \oplus \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3), \mathbf{C}^3), \\ (a, t).v &= av + tv, \\ &\quad (a \in \mathfrak{gl}_1, t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3) \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^3)), \\ f' &= v_1 v_2 v_3, \end{aligned}$$

である．また b-関数は，

$$\begin{aligned} b_f(s) &= (s+1)(s+5)(s+9), \\ b'_f(s) &= (s+1)^3, \end{aligned}$$

である．これらの整数差は，

$$(0,4,8),$$

である．

2.30　(28) $(\mathrm{E}_6 \times GL_2, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(27) \otimes V(2))$

前々項の記号をそのまま用いる．

$$\begin{aligned} (G,V) &= (\mathrm{E}_6 \times GL_2, W \oplus W), \\ (g,h).(w_1,w_2) &= (g.w_1, g.w_2)\,{}^t h, \\ &\quad ((g,h) \in \mathrm{E}_6 \times GL_2, (w_1,w_2) \in W \oplus W), \end{aligned}$$

と実現する．f は $(\det h)^6$ に対応する基本相対不変式である．すると，

$$\begin{aligned} v_f &= \begin{pmatrix} & I_3 & \\ & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix} \oplus \left(\begin{array}{c|c|c} & \begin{matrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{matrix} & \\ \hline & & O_3 \\ \hline O_3 & & \end{array}\right) \in W \oplus W, \\ \mathfrak{g}_{v_f} &= (\{t \oplus t \oplus \varphi_3 \in L | t \in \mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3), \varphi_3 \in \mathfrak{sl}_3\} \oplus \langle e_1^i \otimes e_2^i \otimes e_3^k | i,k = 1,2,3\rangle) \oplus 0, \\ \mathfrak{t}_f &= \{t \oplus t \oplus s | t,s \in \mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3)\} \oplus 0 \subset L \oplus \mathfrak{gl}_2, \\ Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= (\mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3) \oplus \mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3) \oplus \mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3)) \oplus \mathfrak{gl}_2 \subset L \oplus \mathfrak{gl}_2, \\ \mathfrak{g}^{(f)} &\simeq (\mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3) \oplus 0 \oplus 0) \oplus \mathfrak{gl}_2 \simeq \mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3) \oplus \mathfrak{gl}_2, \\ V^{(f)} &= \left\{ \begin{pmatrix} & X_1 & \\ & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & X_2 & \\ & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix} \in W \oplus W \,\middle|\, X_1, X_2 : \text{3 次対角行列} \right\} \\ &\simeq \mathrm{Mat}(3,2), \end{aligned}$$

であるから縮約（の微分）は，

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3) \oplus \mathfrak{gl}_2, \mathrm{Mat}(3,2)), \\ (t,Y).X &= tX + X\,{}^tY, \\ &\quad ((t,Y) \in \mathrm{Lie}(S\mathrm{T}^3) \oplus \mathfrak{gl}_2,\ X \in \mathrm{Mat}(3,2)), \\ f' &= (\det X_{12} \det X_{13} \det X_{23})^2, \end{aligned}$$

である．ただし X_{ij} は X の i 行と j 行をならべた 2×2 行列であり，f' は指標を考えることにより得られる．また b-関数は，

$$\begin{aligned} b_f(s) &= (s+5/6)(s+1)^2(s+7/6)(s+5/2)^2(s+3)^2(s+13/3)(s+9/2)^2(s+14/3), \\ b'_f(s) &= (s+1)^4(s+1/2)^4(s+1/3)(s+2/3)(s+5/6)(s+7/6), \end{aligned}$$

である．これらの整数差は，

$$(0,0,0,0,2,2,2,2,4,4,4,4),$$

2.31 E_7 の 56 次元表現の実現

E_7 の 56 次元表現とは, その最高ウェイトがブルバキの番号づけで ϖ_7 であるような既約表現である. ([7] の番号付けでは ϖ_6) [3] による実現が扱いやすいが, ここでは再び [1] の実現を用いることにする. 本質的には同じ実現である.

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{C}^8, \\ A &= \mathfrak{sl}(V) \oplus \bigwedge^4 V, \\ W &= \bigwedge^2 V + \bigwedge^2 V^*, \end{aligned}$$

と置くと, A が $\mathrm{Lie}(E_7)$ の実現, W がその 56 次元表現の実現になる. 以下にその作用を述べる.

第 1 に $\mathfrak{sl}(V)$ の $\bigwedge^2 V$, $\bigwedge^2 V^*$ への作用は自然である. 第 2 に $\bigwedge^4 V$ の $\bigwedge^2 V$ への作用は, $\bigwedge^4 V \otimes \bigwedge^2 V \to \bigwedge^6 V \simeq \bigwedge^2 V^*$ により定め, 第 3 に $\bigwedge^4 V$ の $\bigwedge^2 V^*$ への作用は, $\bigwedge^4 V \otimes \bigwedge^2 V^* \simeq \bigwedge^4 V^* \otimes \bigwedge^2 V^* \to \bigwedge^6 V^* \simeq \bigwedge^2 V$ により定める.

E_6 の 27 次元表現の場合と同様に, 表現が faithful なので $\mathrm{End}(W)$ のブラケットを引き戻してやれば A のブラケット relation が得られる. まず, $\mathfrak{sl}(V)$ と A の間のブラケットは, $\mathfrak{sl}(V)$ の交換子や外積代数への自然な作用により得られる自然なものである. 次に $\bigwedge^4 V$ どうしのブラケット relation は, [1] により次の関係式から得られる:

$$\begin{aligned} [e_{r_1}\cdots e_{r_4}, e_{s_1}\cdots e_{s_4}] &= 0 \quad (\text{if } r \text{ と } s \text{ に 2 つ以上同じものがある}), \\ [e_1\cdots e_4, e_4\cdots e_7] &= e_4 e_8^* \quad \in V \otimes V^* \simeq \mathfrak{gl}(V), \\ [e_1\cdots e_4, e_5\cdots e_8] &= (1/2)\left(\sum_{r=1}^{4} e_r e_r^* - \sum_{r=5}^{8} e_r e_r^*\right) \in \mathfrak{gl}(V). \end{aligned}$$

ただし, $\{e_i\}$ は V の ONB で, $\wedge$ を省略して書いている.

2.32 (29) $(GL_1 \times E_7, \Lambda_1 \otimes \Lambda_6, V(1) \otimes V(56))$

GL_1 の自然表現と E_7 の 56 次元表現のテンソル積表現として実現する. 前項の記号をそのまま用いる. [3] により,

$$f(w \oplus w^*) = \mathrm{Pf}\, w + \mathrm{Pf}\, w^* - (1/4)\,\mathrm{Tr}(ww^*ww^*) + (1/16)(\mathrm{Tr}\, ww^*)^2,$$

である. ここで V の基底 $\{e_i\}$ と, V^* にその双対基底 $\{e_i^*\}$ をとることにより, $w \oplus w^* \in \bigwedge^2 V \oplus \bigwedge^2 V^* \simeq \mathrm{Alt}_8 \oplus \mathrm{Alt}_8$ とみなしている. すると,

$$\begin{aligned} v_f &= \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & O_6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & O_6 \end{pmatrix} = e_1 e_2 \oplus e_1^* e_2^*, \\ \mathfrak{g}_{v_f} &= \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_1 & \\ & \varphi_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \varphi_1 \in \mathfrak{sl}_2, \varphi_4 \in \mathfrak{sl}_6 \right\} \oplus \langle e_i e_r e_s e_t | i = 1, 2; 3 \le r < s < t \le 8 \rangle \\ &\simeq \mathrm{Lie}(E_6), \\ \mathfrak{t}_f &= \left\{ \begin{pmatrix} s & \\ & t \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^2), t \in \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^6) \right\} \subset \mathfrak{sl}(V), \\ Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_f) &= \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathrm{Lie}(S\mathbf{T}^8) \subset \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{sl}(V), \\ \mathfrak{g}^{(f)} &\simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \{\mathrm{diag}(b, 0, -b, 0, 0, 0, 0, 0) | b \in \mathbf{C}\} \simeq \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1, \\ V^{(f)} &= \langle e_1 e_2 \rangle \oplus \langle e_1^* e_2^* \rangle \simeq \mathbf{C}^2, \end{aligned}$$

であるから縮約（の微分）は,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{g}^{(f)}, V^{(f)}) &= (\mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1, \mathbf{C}^2),\\ (a,b).v &= {}^t((a+b)v_1, (a-b)v_2),\\ &\quad ((a,b) \in \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{gl}_1,\ v = {}^t(v_1, v_2) \in \mathbf{C}^2),\\ f' &= v_1^2 v_2^2,\end{aligned}$$

である. また b-関数は,

$$\begin{aligned}b_f(s) &= (s+1)(s+4)(s+11/2)(s+19/2),\\ b'_f(s) &= (s+1)^2(s+1/2)^2,\end{aligned}$$

である. これらの整数差は,

$$(0, 5, 9, 13),$$

である.

References

[1] Adams, J. F., *Lectures on exceptional Lie groups*, The University of Chicago Press, Chicago (1996).

[2] Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5, et 6*, Hermann, Paris (1968).

[3] Haris, S. J., *Some irreducible representations of exceptional algebraic groups*, Amer. J. Math. **93** (1971), 75–106.

[4] Humphreys, J. E., *Finite and infinite dimensional modules for semisimple Lie algebra*, Lie theories and their applications, Queen's papers in Pure and Appl. Math. No. 48, Queen's Univ., Kingston, Ont., (1978), 1–64. Proc. Edinb. Math. Soc. **8** (1948), 76–86.

[5] Kasai, S., *On the b-functions of regular prehomogeneous vector spaces of simple algebraic groups* (in Japanese), Surikaiseki Kenkyusho Kokyuroku **629** (1987), 31–81.

[6] Kimura, T., *Gaikinshitsu bekutoru kukan* (in Japanese), Iwanami Shoten, Tokyo (1998).

[7] Sato, M. and Kimura, T., *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1–155.